O pewnej tożsamości.

Napisał

Władysław Kretkowski.

(Rzecz przedstawiona na posiedzeniu Wydz. mat.-przyr. z d. 3 października 1892 roku ref. czł. Zajączkowski).

W pracy niniejszej podaję dowód pewnej tożsamości wyznacznikowej, którą dla $n = 2, 3$ napotyka się w wielu razach w geometryi dwu i trzywymiarowej. I tak naprzykład: jeżeli przy współrzędnych prostokątnych chcemy wyrazić różniczkę łuku s krzywej leżącej na powierzchni danej przez równania:

$$z_m = f_m(u_1, u_2); \qquad m = 1, 2, 3;$$

to mamy:

$$(ds)^2 = \mathop{S}_{m=1}^{m=3} (dz_m)^2 = \mathop{S}_{m=1}^{m=3} \left(\mathop{S}_{n=1}^{n=2} \frac{df_m}{du_n} du_n \right)^2 = \mathop{S}_{m=1}^{m=3} \mathop{S}_{n=1}^{n=2} \mathop{S}_{p=1}^{p=2} \frac{df_m}{du_n} \frac{df_m}{du_p} du_n du_p =$$

$$= \mathop{S}_{n=1}^{n=2} \mathop{S}_{p=1}^{p=2} \left(\mathop{S}_{m=1}^{m=3} \frac{df_m}{du_n} \frac{df_m}{du_p} \right) du_n du_p,$$

a jeżeli oznaczymy dla krótkości:

$$A_{n,p} = \mathop{S}_{m=1}^{m=3} \frac{d f_m}{d u_n} \frac{d f_m}{dn_p}; \qquad n, p = 1, 2$$

mamy widocznie:

$$A_{n,p} = A_{p,n}; \qquad n, p = 1, 2;$$

oraz:

$$(ds)^2 = \overset{n=2}{\underset{n=1}{S}} \; \overset{p=2}{\underset{p=1}{S}} A_{n,p}\, du_n\, du_p .$$

Trzeba dowieść, że wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{1,2} & A_{2,2} \end{vmatrix}$$

nie jest nigdy ujemnym dla powierzchni rzeczywistych.

Wyznacznik ten jest niejako kwadratem wyznacznika prostokątnego

$$\begin{vmatrix} \frac{df_1}{du_1}, & \frac{df_2}{du_1}, & \frac{df_3}{du_1} \\ \frac{df_1}{du_2}, & \frac{df_2}{du_2}, & \frac{df_3}{du_3} \end{vmatrix}$$

w przypuszczeniu, że mnożenie wykonano wierszami poziomemi.

W tym razie łatwo twierdzenia dowieść, można się bowiem wprost przez rozwinięcie przekonać, że jest:

$$\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{vmatrix} = \left(\frac{d(f_2, f_3)}{d(u_1, u_2)}\right)^2 + \left(\frac{d(f_3, f_1)}{d(u_1, u_2)}\right)^2 + \left(\frac{d(f_1, f_2)}{d(u_1, u_2)}\right)^2;$$

lecz w przestrzeni $l=2, 3, \ldots$ wymiarowej dowodzenie wprost przez rozwinięcie jest prawie niewykonalnem i trzeba szukać innego dowodu. Udało mi się dosyć łatwo i krótko tego twierdzenia dowieść i dowód ten podaję poniżej.

Twierdzenie ogólne brzmi:

Jeżeli $l = 2, 3, \ldots$ jest liczbą całkowitą dodatną, $a_{n,m}$ $(m=1, 2, 3, \ldots, l)$ $(n=1, 2, 3, \ldots, l-1)$; $l(l-1)$ ilości dowolnych rzeczywistych, które ustawimy w układ prostokątny o $l-1$ wierszach poziomych i l wierszach pionowych:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3}, \ldots, & a_{1,l} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3}, \ldots, & a_{2,l} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{l-1,1}, & a_{l-1,2}, & a_{l-1,3}, \ldots, & a_{l-1,l} \end{vmatrix}$$

jeżeli będziemy uważać ten układ za wyznacznik prostokątny i podniesiemy go do kwadratu wykonywając mnożenie wierszami poziomymi, to oznaczywszy dla krótkości:

$$A_{n,p} = \overset{m=l}{\underset{m=1}{S}} a_{n,m}\, a_{p,m}; \qquad n, p = 1, 2, 3, \ldots, l-1;$$

mamy widocznie:

$$A_{p,n} = A_{n,p}; \quad n, p = 1, 2, 3, \ldots, l-1$$

i trzeba dowieść, że wyznacznik symetryczny

$$A_l = \begin{vmatrix} A_{1,1}, & A_{1,2}, \ldots, & A_{1,l-1} \\ A_{2,1}, & A_{2,2}, \ldots, & A_{2,l-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{l-1,1}, & A_{l-1,2}, \ldots, & A_{l-1,l-1} \end{vmatrix} \qquad 1)$$

nie jest nigdy ujemnym, a dowiedziemy tego, pokazując, że równa się sumie l kwadratów tyluż wyznaczników $(l-1)$-go stopnia, które otrzymamy z układu prostokątnego, opuszczając w nim kolejno wiersze pionowe $m = 1, 2, \ldots, l$ te, to jest, że równa się:

$$\overset{m=l}{\underset{m=1}{S}} \begin{vmatrix} a_{1,1}, \ldots, a_{1,m-1}, a_{1,m+1}, \ldots, a_{1,l} \\ a_{2,1}, \ldots, a_{2,m-1}, a_{3,m+1}, \ldots, a_{2,l} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{l-1,1}, \ldots, a_{l-1,m-1}, a_{l+1,m+1}, \ldots, a_{l-1,l} \end{vmatrix}^2 .$$

Oznaczywszy dla krótkości wyznacznik będący pod znakiem sumowym pomnożony przez $(-1)^{1+l}$ przez a_m; $m = 1, 2, 3, \ldots . l$, trzeba dowieść że jest:

$$A_1 = \overset{m=l}{\underset{m=1}{S}} a_m^2 .$$

Przypuściwszy prawdziwość tego równania, które można napisać także w postaci:

$$A_l = \begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3, & \ldots, & a_l \\ a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3}, & \ldots, & a_{1,l} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3}, & \ldots, & a_{2,l} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{l-1,1}, & a_{l-1,2}, & a_{l-1,3}, & \ldots, & a_{l-1,l} \end{vmatrix}$$

(dosyć bowiem rozwinąć ostatni wyznacznik stopnia l-go podług wiersza poziomego pierwszego) i zważywszy, że:

$$A_l = A_l^{-1} A_l^2 ;$$

tudzież, że zachodzą (rozwijając podług wiersza poziomego pierwszego) $l-1$ równości:

$$0 = \begin{vmatrix} a_{n,1}, & a_{n,2}, & a_{n,3}, \ldots, & a_{n,l} \\ a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3}, \ldots, & a_{1,l} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3}, \ldots, & a_{2,l} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{l-1,1}, & a_{l-1,2}, & a_{l-1,3}, \ldots, & a_{l-1,l} \end{vmatrix} = \overset{m=l}{\underset{m=1}{S}} a_{n,m} a_m ; \quad n = 1, 2, 3, \ldots, l-1;$$

z powodu, że w wyznaczniku są dwa wiersze poziome jednakowe, wykonajmy podnoszenie do kwadratu w przedostatnim równaniu wyznacznika A_l w postaci wyznacznika 1-go stopnia, wierszami poziomymi, a otrzymamy:

$$A_l = A_l^{-1} \begin{vmatrix} \mathop{S}\limits_{m=1}^{m=l} a_m^2, & \mathop{S}\limits_{m=1}^{m=l} a_m a_{1,m}, & \mathop{S}\limits_{m=1}^{m=l} a_m a_{2,m}, & \ldots, & \mathop{S}\limits_{m=1}^{m=l} a_m a_{l-1,m} \\ \mathop{S}\limits_{m=1}^{m=l} a_{1,m} a_m, & \mathop{S}\limits_{m=1}^{m=l} a_{1,m}^2, & \mathop{S}\limits_{m=1}^{m=l} a_{1,m} a_{2,m}, & \ldots, & \mathop{S}\limits_{m=1}^{m=l} a_{1,m} a_{l-1,m} \\ \mathop{S}\limits_{m=1}^{m=l} a_{2,m} a_m, & \mathop{S}\limits_{m=1}^{m=l} a_{2,m} a_{1,m} & \mathop{S}\limits_{m=1}^{m=l} a_{2,m}^2, & \ldots, & \mathop{S}\limits_{m=1}^{m=l} a_{2,m} a_{l-1,m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathop{S}\limits_{m=1}^{m=l} a_{l-1,m} a_m, & \mathop{S}\limits_{m=1}^{m=l} a_{l-1,m} a_{2,m}, & \mathop{S}\limits_{m=1}^{m=l} a_{l-1,m} a_{2,m}, & \ldots, & \mathop{S}\limits_{m=1}^{m=l} a_{l-1,m}^2 \end{vmatrix}$$

czyli:

$$A_l = A_l^{-1} \begin{vmatrix} A_l, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & A_{1,1}, & A_{1,2}, & \ldots, & A_{1,l-1} \\ 0, & A_{2,1}, & A_{2,2}, & \ldots, & A_{2,l-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & A_{l-1,1}, & A_{l-1,2}, & \ldots, & A_{l-1,l-1} \end{vmatrix}$$

a rozwinąwszy ostatni wyznacznik według wiersza poziomego pierwszego, otrzymamy tożsamość:

$$A_l = A_l^{-1} A_l \begin{vmatrix} A_{1,1}, & A_{1,2}, & \ldots, & A_{1,l-1} \\ A_{2,1}, & A_{2,2}, & \ldots, & A_{2,l-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{l-1,1}, & A_{l-1,2}, & \ldots, & A_{l-1,l-1} \end{vmatrix} = A_l^{-l} A_l A_l^{+l} = A_l$$

o którą chodziło.